

ΘΕΜΑ Α

A1. Σωστή Απάντηση: γ

A2. Σωστή Απάντηση: β

A3. Σωστή Απάντηση: γ

A4. Σωστή Απάντηση: γ

A5. α. Σ β. Σ γ. Λ δ. Λ ε. Σ

ΘΕΜΑ Β

B1. Σωστή απάντηση: γ.

Έστω θ_1 η γωνία πρόσπτωσης του φωτός στην διαχωριστική επιφάνεια νερού-λαδιού.

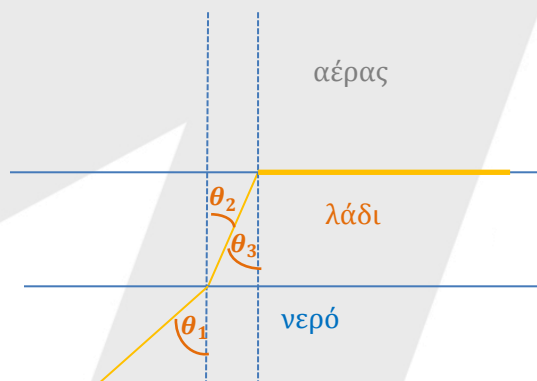
Η γωνία αυτή είναι ίση με την κρίσιμη γωνία για την περίπτωση όπου το φως θα μετέβαινε στον αέρα από νερό.

$$\text{Άρα: } \eta\mu\theta_1 = \frac{1}{n_\nu} \quad (1)$$

Επίσης, για την διάθλαση από το νερό στο λάδι ισχύει:

$$\frac{\eta\mu\theta_1}{\eta\mu\theta_2} = \frac{n_\lambda}{n_\nu} > 1 \quad (2)$$

Όπου n_λ ο δείκτης διάθλασης του λαδιού, n_ν ο δείκτης διάθλασης του νερού και θ_2 η γωνία διάθλασης από το νερό στο λάδι.



ΜΕΘΟΔΙΚΟ

Όμως, ως εντός εναλλάξ $\theta_2 = \theta_3$, όπου θ_3 η γωνία διάθλασης για την μετάβαση από το λάδι στον αέρα.

Υπολογίζουμε την κρίσιμη γωνία για την μετάβαση από το λάδι στο αέρα:

$$\eta\mu\theta_{crit\lambda-\alpha} = \frac{1}{n_\lambda} \quad (3)$$

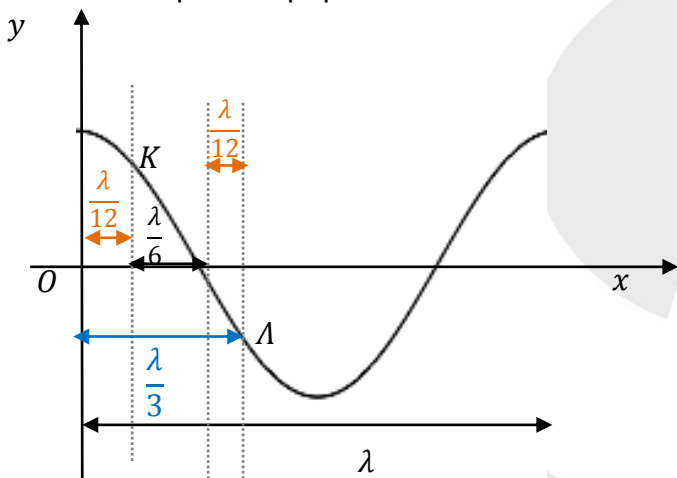
Όμως από τη σχέση (2): $\eta\mu\theta_2 = \frac{n_\nu}{n_\lambda}\eta\mu\theta_1$ και μέσω της σχέσης (1) παίρνουμε:

$$\eta\mu\theta_2 = \frac{n_\nu}{n_\lambda} \frac{1}{n_\nu} \Rightarrow \eta\mu\theta_2 = \frac{1}{n_\lambda}$$

Άρα: $\eta\mu\theta_2 = \eta\mu\theta_{crit\lambda-\alpha}$

Οπότε: $\theta_2 = \theta_{crit\lambda-\alpha}$. Όμως: $\theta_3 = \theta_2$, άρα $\theta_3 = \theta_{crit\lambda-\alpha}$.

B2. Σωστή απάντηση: α



Για τα σημεία K και A έχουμε:

$$x_K = \frac{\lambda}{4} - \frac{\lambda}{6} = \frac{2\lambda}{24} = \frac{\lambda}{12}$$

$$\text{Άρα: } |A_K| = \left| 2A \sin\left(\frac{2\pi\frac{\lambda}{12}}{\lambda}\right) \right| = 2 \left| A \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right| = 2A \frac{\sqrt{3}}{2} = A\sqrt{3}$$

$$x_A = \frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda}{12} = \frac{3\lambda + \lambda}{12} = \frac{4\lambda}{12} = \frac{\lambda}{3}$$

$$\text{Άρα: } |A_A| = \left| 2A \sin\left(\frac{2\pi\frac{\lambda}{3}}{\lambda}\right) \right| = 2A \frac{1}{2} = A$$

Οπότε:

$$\frac{U_K}{U_A} = \frac{\omega A\sqrt{3}}{\omega A} = \sqrt{3}$$

B3. Σωστή απάντηση: α

Στη διεύθυνση που είναι παράλληλη στους δύο τοίχους τη σφαίρα Σ_2 δε δέχεται καμία δύναμη. Άρα στη διεύθυνση αυτή η Σ_2 εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση με ταχύτητα μέτρου v_x .

$$\text{Επειδή: } v_x = v \sin 60^\circ = v \frac{1}{2}$$

Άρα για τη σφαίρα Σ_1 είναι: $t_1 = \frac{A\Gamma}{v}$, ενώ για τη Σ_2 έχουμε:

$$t_2 = \frac{A\Gamma}{\frac{v}{2}} = 2 \frac{A\Gamma}{v} = 2t_1$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για τη ροπή αδράνειας της ράβδου με βάση το

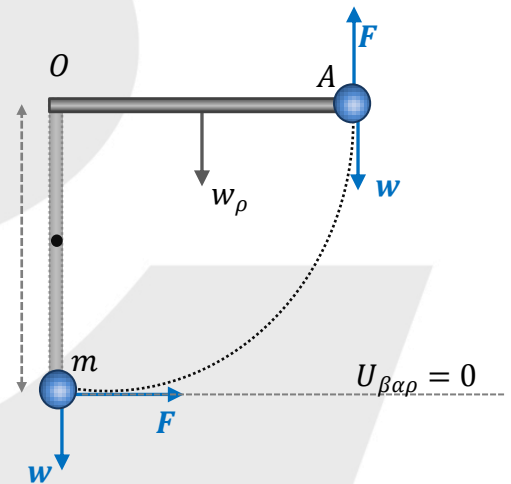
Θεώρημα Steiner έχουμε:

$$I_{\rho\alpha\beta} = I_{cm} + M\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{Ml^2}{12} + \frac{Ml^2}{4} = \frac{Ml^2}{3}$$

Αντίστοιχα, για τη ροπή αδράνειας του συστήματος είναι: l

$$I_{\Sigma\Gamma\Sigma(0)} = \frac{Ml^2}{3} + m \cdot l^2 = \frac{Ml^2}{3} + \frac{M}{2}l^2 \Rightarrow I_{\Sigma\Gamma\Sigma(0)} = \frac{5Ml^2}{6}$$

$$I_{\Sigma\Gamma\Sigma(0)} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 10^{-2}}{6} \Rightarrow I_{\Sigma\Gamma\Sigma(0)} = 45 \cdot 10^{-2} \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$$



Γ2. Για το έργο της δύναμης F μέχρι την οριζόντια θέση έχουμε:

$$W_{\tau_F} = F \cdot l \cdot \theta = \frac{120}{\pi} \cdot 0,3 \frac{\pi}{2} \Rightarrow W_{\tau_F} = 18 \text{ J}$$

Γ3. Για να βρούμε τη γωνιακή ταχύτητα στην οριζόντια θέση εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. από την κατακόρυφη στην οριζόντια θέση:

$$\frac{1}{2} I_{\Sigma\Gamma\Sigma(0)} \cdot \omega^2 = W_{\tau_F} - m \cdot g \cdot l - Mg \frac{l}{2}$$

$$\frac{1}{2} I_{\Sigma\Gamma\Sigma(0)} \cdot \omega^2 = W_{\tau_F} - \frac{Mgl}{2} - \frac{Mgl}{2}$$

$$\frac{1}{2} I_{\Sigma\Gamma\Sigma(0)} \cdot \omega^2 = W_{\tau_F} - Mgl$$

$$\omega^2 = \frac{2(W_{\tau_F} - Mgl)}{I_{\Sigma\Gamma\Sigma(0)}}$$

$$\omega^2 = \frac{2(18 - 6 \cdot 10 \cdot 0,3)}{4} \Rightarrow \omega = 0 \text{ rad/s}$$

ΜΕΘΟΔΙΚΟ

Γ4. Η κινητική ενέργεια μεγιστοποιείται εκεί που η συνισταμένη των ροπών είναι μηδέν. Στη θέση εκείνη πρέπει να βρούμε τη γωνία που σχηματίζει η ράβδος με την κατακόρυφο. Έχουμε:

$$\Sigma \tau = 0 \Rightarrow T_{F'} = T_{w_\rho} + T_w$$

$$F' \cdot l = M \cdot g \cdot x_\rho + m \cdot g \cdot x \quad (1),$$

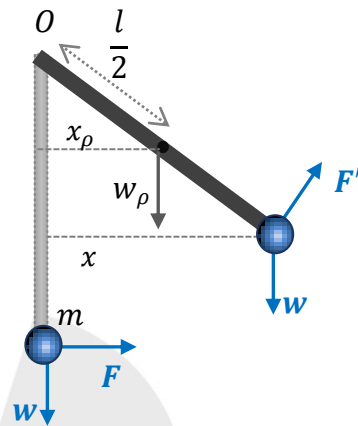
όπου $x_\rho = \frac{l}{2} \eta\mu\varphi$ και $x = l \eta\mu\varphi$

Οπότε έχουμε:

$$(1) \Rightarrow F' \cdot l = M \cdot g \cdot \frac{l}{2} \cdot \eta\mu\varphi + \frac{M}{2} \cdot g \cdot l \cdot \eta\mu\varphi$$

$$\eta\mu\varphi = \frac{F'}{Mg} \Leftrightarrow \eta\mu\varphi = \frac{30\sqrt{3}}{6 \cdot 10}$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi = \pi/3 \text{ rad}$$



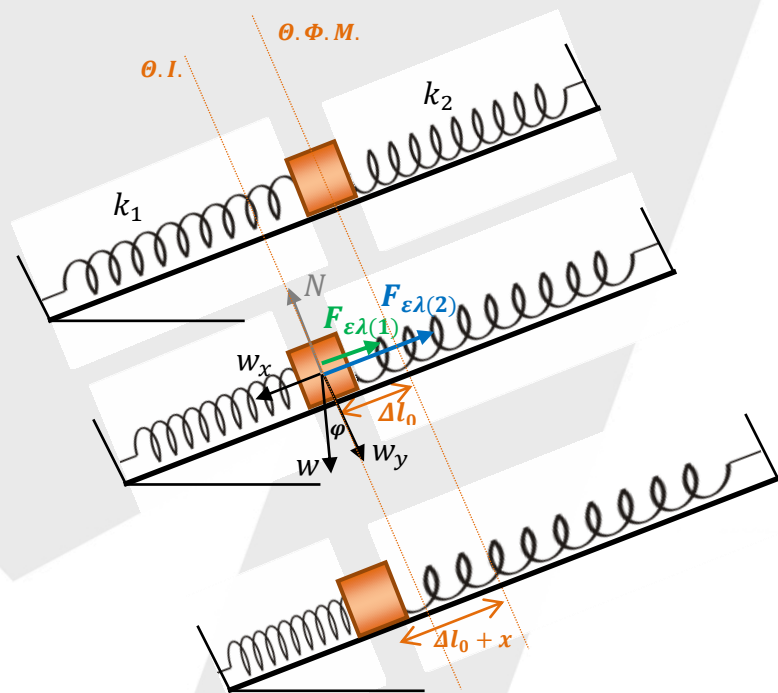
ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Στη θέση ισορροπίας του σώματος m έχουμε:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow w_x = F_{EL(1)} + F_{EL(2)} \Rightarrow m_1 g \eta\mu 30^\circ = k_1 \Delta l_0 + k_2 \Delta l_0 \quad (1)$$

Με αντικατάσταση παίρνουμε: $2 \cdot 10 \cdot \frac{l}{2} = 60 \Delta l_0 + 140 \Delta l_0 \Rightarrow \Delta l_0 = \frac{1}{20} \text{ m}$

Το ελατήριο σταθεράς k_1 συμπιέζεται κατά x από την Θ.Ι. του και ταυτόχρονα το ελατήριο σταθεράς k_2 επιμηκύνεται κατά x .



ΜΕΘΟΔΙΚΟ

Για τη συνισταμένη των δυνάμεων ισχύει:

$$\begin{aligned}\Sigma F &= w_x - F'_{E\Lambda(1)} - F'_{E\Lambda(2)} = m_1 g \eta\mu 30^\circ - k_1(\Delta l_0 - x) - k_2(\Delta l_0 + x) \\ &= m_1 g \eta\mu 30^\circ - k_1 \Delta l_0 - k_1 x - k_2 \Delta l_0 - k_2 x \quad \text{που λόγω της εξίσωσης (1) γίνεται:} \\ \Sigma F &= -k_1 x - k_2 x = -(k_1 + k_2) x\end{aligned}$$

Επειδή η ΣF είναι της μορφής: $\Sigma F = -Dx$, το σώμα κάνει απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς: $D = k_1 + k_2 = 200 \text{ N/m}$.

Δ2. Για την κυκλική συχνότητα της α.α.τ. έχουμε:

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m_1}} = \sqrt{\frac{200}{2}} = 10 \text{ rad/s}$$

Η εξίσωση της απομάκρυνσης είναι: $x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$

Τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι: $x = +A$ οπότε αντικαθιστώντας προκύπτει:

$$A = A\eta\mu\varphi_0 \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = 1 \Rightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{2}$$

Έτσι η εξίσωση γίνεται: $x = 0,05\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)$ στο (S.I.)

Το m_2 αφήνεται στην ακραία θέση διότι έχει ταχύτητα μηδέν.

Άρα, η νέα ταλάντωση του συσσωματώματος θα έχει πλάτος: $A = \Delta l_0 = 0,05 \text{ m}$

Δ3. Το σύστημα τώρα των $(m_1 + m_2)$ εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με ίδιο $D = 200 \text{ N/m}$ αλλά διαφορετική κυκλική συχνότητα ίση με

$$\omega' = \sqrt{\frac{D}{m_1 + m_2}} = \sqrt{\frac{200}{8}} = \sqrt{25} \Rightarrow \omega' = 5 \text{ rad/s}$$

Η ταλάντωση του m_2 τώρα θα έχει σταθερά επαναφοράς: $D_2 = m_2 \omega'^2 = 6 \cdot 5^2 = 150 \text{ N/m}$

Το m_2 θα κάνει απλή αρμονική ταλάντωση με κυκλική συχνότητα ίδια με (τη νέα κυκλική συχνότητα) του συστήματος $\omega_2 = \omega'$.

Δ4.

Για να βρούμε το νέο πλάτος της ταλάντωσης έχουμε:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow (m_1 + m_2) g \eta\mu 30 = D \cdot \Delta l'_0 \Rightarrow 8 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} = 200 \Delta l'_0 \Rightarrow$$

$$\Delta l'_0 = \frac{40}{200} \Rightarrow \Delta l_0 = \frac{2}{10} \Rightarrow \Delta l'_0 = 0,2 \text{ m}$$

$$A' = 0,2 \text{ m}$$

ΜΕΘΟΔΙΚΟ

Στην τυχαία θέση για το m_2 που εκτελεί α.α.τ. ισχύει:

$$\Sigma F = -D_2 x \Rightarrow -m_2 g \eta\mu 30^\circ + T_{\sigma\tau\alpha\tau} = -D_2 x \Rightarrow$$

$$T_{\sigma\tau\alpha\tau} = m_2 g \eta\mu 30^\circ - D_2 x = 30 - 150 x \quad (2) \text{ στο (S.I.) με:}$$

$$-A' \leq x \leq A' \Leftrightarrow -0,2 \leq x \leq 0,2 \text{ m}$$

Για να εκτελεί α.α.τ. πρέπει: $T_{\sigma\tau\alpha\tau} \leq T_{\sigma\tau\alpha\tau(\max)}$ (3)

$$\text{Αλλά: } T_{\sigma\tau\alpha\tau(\max)} = \mu N = \mu m_2 g \sigma\upsilon\nu 30^\circ = \mu \cdot 6 \cdot 10 \frac{\sqrt{3}}{2} = 30 \sqrt{3} \mu \text{ στο (S.I.)}$$

$$\text{Από τις σχέσεις (2) και (3) παίρνουμε: } 30 - 150 x \leq 30 \sqrt{3} \mu \Leftrightarrow 1 - 5x \leq \sqrt{3} \mu$$

$$\Leftrightarrow \mu \geq (1 - 5x) \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Για $x = +A' = +0,2 \text{ m}$ έχουμε: $\mu \geq 0$

$$\text{Για } x = -A' = -0,2 \text{ m} \text{ έχουμε: } \mu \geq (1 + 1) \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \mu \geq \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Συναληθεύοντας παίρνουμε: $\mu \geq \frac{2\sqrt{3}}{3}$

Άρα η ελάχιστη λύση είναι: $\mu_{\min} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

*Επιμέλεια: Δημήτρης Αγαλόπουλος, Νίκος Πουγκιάλης, Στέφανος Μαυρογιώργης,
Χαρίλαος Τσαγκαράκης*